Lista 2 - Relatividade Geral

Ricardo Antonio Mosna, agosto de 2023

1. Mostre que se dois eventos no espaço de Minkowski são separados por um vetor tipo tempo, então existe um referencial inercial no qual eles estão na mesma posição, i.e., têm as mesmas coordenadas espaciais. Da mesma forma, mostre que, se dois eventos são separados por um vetor tipo espaço, então existe um referencial inercial em que eles são simultâneos, i.e., têm a mesma coordenada temporal.

2. Mostre que se dois eventos A e B são ligados por um vetor tipo tempo ou tipo luz, então a ordem temporal destes eventos independe do observador. Mostre que o mesmo não ocorre se a separação entre esses eventos for tipo espaço. Ilustre seus resultados num diagrama de Minkowski.

3. Considere o espaço de Minkowski com sua métrica usual e dimensão $D \geq 3$. Mostre que se o vetor λ^μ é ortogonal a:

   (a) um vetor tipo tempo t^μ, então λ^μ é tipo espaço.

   (b) um vetor tipo luz n^μ, então λ^μ é ou tipo espaço ou proporcional a n^μ.

   (c) um vetor tipo espaço s^μ, então λ^μ pode ser tipo tempo, tipo luz ou tipo espaço.

   Ilustre seus resultados num diagrama de Minkowski.

4. (Problema 9, apêndice A do Foster & Nightingale) Mostre que a fórmula do efeito Doppler pode ser escrita de maneira invariante como

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{u^\mu_{\text{source}}\, k_\mu}{u^\nu k_\nu}$$

5. Seja g o produto interno em $\mathbb{R}^4$ definido por $g(x, y) = x^t \eta y$, com $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

   (a) Mostre que suas isometrias são dadas por $\mathcal{L} = \{M \text{ matrizes } n \times n \text{ reais: } M^t \eta M = \eta\}$.

   (b) Mostre que se $M \in \mathcal{L}$ então $M^{-1} = \eta M^t \eta$ e $M \eta M^t = \eta$.

   (c) Mostre que $\mathcal{L}$ é um grupo.

   (d) Mostre que se $M \in \mathcal{L}$ então $\det(M) = \pm 1$ e $|\Lambda^0{}_0| \geq 1$. Argumente que isso divide $\mathcal{L}$ em quatro componentes desconectadas entre si.

   (e) Mostre que $\mathcal{L}^\uparrow_+ = \{M \in \mathcal{L} : \det(M) = +1 \text{ e } \Lambda^0{}_0 \geq +1\}$ é um subgrupo de $\mathcal{L}$.

(f) (Opcional) Se você sabe o que é uma álgebra de Lie, determine a álgebra de Lie de $\mathcal{L}$.

6. Definimos a simetrização e antissimetrização do tensor $T_{i_1\cdots i_n}$ por $T_{(i_1\cdots i_n)} = \frac{1}{n!}\sum_\sigma T_{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_n)}$ e $T_{[i_1\cdots i_n]} = \frac{1}{n!}\sum_\sigma (-1)^\sigma T_{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_n)}$, respectivamente, onde a soma percorre todas as permutações σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ e $(-1)^\sigma$ denota o sinal da permutação.

   (a) Obtenha expressões explícitas dessas operações para $n \leq 3$;

   (b) Mostre que se $T_{i_1\cdots i_n}$ é simétrico (resp. antissimétrico) em todos os seu índices, então $T_{(i_1\cdots i_n)} = T_{i_1\cdots i_n}$ (resp. $T_{\{i_1\cdots i_n\}} = T_{i_1\cdots i_n}$);

   (c) Mostre que se A_{ij} é simétrico, então $A^{ij}B_{ij} = A^{ij}B_{(ij)}$;

   (d) Mostre que se A_{ij} é antissimétrico, então $A^{ij}B_{ij} = A^{ij}B_{[ij]}$;

   (e) Mostre que se A_{ij} é simétrico e B_{ij} é antissimétrico, então $A^{ij}B_{ij} = 0$.

7. O símbolo completamente antissimétrico de Levi-Civita, $\tilde{\epsilon}_{\mu_1\ldots\mu_n}$ é definido como sendo $+1$ se $\{\mu_1\ldots\mu_n\}$ é uma permutação par de $\{1\ldots n\}$, -1 se $\{\mu_1\ldots\mu_n\}$ é uma permutação ímpar de $\{1\ldots n\}$ e 0 nos demais casos (isto é, quando $\{\mu_1\ldots\mu_n\}$ contém algum índice repetido). Por *definição*, o símbolo de Levi-Civita tem as componentes acima em qualquer sistema de coordenadas e portanto não é um tensor (vamos remediar isso no exercício seguinte). Vamos assumir que estamos trabalhando em $\mathbb{R}^3$ euclidiano com coordenadas cartesianas de maneira que índices podem ser subidos e baixados impunemente.

   (a) Mostre que $\tilde{\epsilon}_{ijk}\,\tilde{\epsilon}_{rsk} = \delta_{ir}\delta_{js} - \delta_{is}\delta_{jr}$;

   (b) Mostre que $\tilde{\epsilon}_{ijk}\,\tilde{\epsilon}_{ijl} = 2\,\delta_{kl}$;

   (c) Mostre que $(\vec{A}\times\vec{B})_k = \tilde{\epsilon}_{ijk}A_iB_j$ e $(\nabla\times\vec{A})_k = \tilde{\epsilon}_{ijk}\partial_iA_j$;

   (d) Use os itens anteriores para mostrar que $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\,(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}\,(\vec{A}\cdot\vec{B})$ e $\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \nabla\,(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$.

8. **Densidades tensoriais e o tensor de Levi-Civita** (exercício 10 ligeiramente modificado da lista 2, do curso do Maurício Richartz)

   Vamos agora construir um tensor a partir do símbolo de Levi-Civita.

   (a) Seja $M^{\mu}{}_{\mu'}$ uma matrix $n\times n$ (μ indica a linha e (μ' indica a coluna). Mostre que $\det(M) = \tilde{\epsilon}_{\mu_1\ldots\mu_n}M^{\mu_1}{}_1\cdots M^{\mu_n}{}_n$. Faça a conta explícita para o caso $n = 2$ e $n = 3$.

   (b) Mostre que $\tilde{\epsilon}_{\mu'_1\ldots\mu'_n}\det(M) = \tilde{\epsilon}_{\mu_1\ldots\mu_n}M^{\mu_1}{}_{\mu'_1}\cdots M^{\mu_n}{}_{\mu'_n}$.

(c) Mostre que o símbolo de Levi-Civita se transforma pela seguinte regra:

$$\tilde{\epsilon}_{\mu_1'\dots\mu_n'} = \det(J)\ \tilde{\epsilon}_{\mu_1\dots\mu_n} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x^{\mu_1'}} \cdots \frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial x^{\mu_n'}},$$

onde $J = \left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}\right)$ é a matriz Jaconiana. Assim, a menos do fator $\det(J)$, o símbolo de Levi-Civita se transforma como um tensor. Como o fator $\det(J)$ aparece elevado a potência 1, dizemos que o símbolo de Levi-Civita é uma densidade tensorial de peso 1.

(d) A métrica g é um tensor do tipo $(0,2)$ e assim se transforma como $g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} g_{\mu\nu}$. Mostre que seu determinante $g = \det(g_{\mu\nu})$ como $g' = \det(J)^{-2} g$. Assim, a menos do fator $\det(J)$, o determinante da métrica se transforma como um escalar. Como o fator $\det(J)$ aparece elevado à potência -2 dizemos que o determinante da métrica é uma densidade escalar de peso -2.

(e) Mostre que, dada uma densidade tensorial de peso w, podemos transformá-la em um tensor simplesmente multiplicando-a por $g^{w/2}$, se $g > 0$. Em particular, podemos definir o *tensor* de Levi-Civita $\epsilon_{\mu_1\dots\mu_n}$ a partir do símbolo de Levi-Civita fazendo

$$\epsilon_{\mu_1\dots\mu_n} = \sqrt{g}\ \tilde{\epsilon}_{\mu_1\dots\mu_n}.$$

(f) Como devemos proceder no caso em que $g < 0$?